Deuxième partie : Théorie de la production et des coûts (p 85)
Introduction : Théorie de la firme (p 85)
Chapitre I : Étude générale de la fonction de production p 88

(de "Introduction à la microéconomie" Albert MINGUET)

CHAPITRE II

GESTION OPTIMALE DU COUT DE PRODUCTION

INTRODUCTION

Dès l'instant où les relations techniques entre facteurs et produit sont représentées par une fonction de production continue, la firme dispose donc d'une infinité de combinaisons possibles de facteurs lui permettant de produire tout niveau de production donné. D'où, du moment que la firme a choisi de produire telle quantité particulière, elle doit résoudre le problème consistant à préciser quelle sera la combinaison de facteurs utilisée parmi toutes celles qui permettent de réaliser l'objectif souhaité. Or, à cette fin, on admet ici l'hypothèse fondamentale selon laquelle le choix de la firme entre les différentes combinaisons de facteurs également efficientes est dicté essentiellement par l'objectif de minimisation du coût de production. Ainsi, parmi toutes les combinaisons de facteurs qui permettent de réaliser le niveau de production souhaité, c'est donc la combinaison de moindre coût qui est censée être choisie par la firme. Cette hypothèse va permettre non seulement d'envisager quelle sera la position d'équilibre adoptée par la firme, mais en outre de dégager par le moyen d'une analyse de statique comparative une série d'indications sur la manière dont la firme réagit quand l'un ou l'autre des différents éléments qui influencent son coût de production vient à se modifier.

On peut se demander, bien sûr, si l'objectif de minimisation du coût de production constitue effectivement un objectif pris en considération par une firme quelconque. Sans entrer une fois de plus dans le détail de la discussion des objectifs de la firme, on peut se contenter d'observer ici que, dès l'instant où l'objectif de maximisation du profit intervient soit comme objectif essentiel de la firme, soit comme un des principaux objectifs visés par celle-ci, la minimisation du coût de production apparaît alors comme une des conditions requises pour la réalisation de l'objectif de maximisation du profit global. Au surplus, l'objectif de minimisation du coût de production n'est évidemment pas spécifique au cas d'une firme en régime capitaliste. Il peut tout aussi bien se concevoir, par exemple, dans le cas d'une firme dans une économie planifiée qui se voit imposer comme contrainte de réaliser les objectifs prescrits par le plan tout en minimisant son coût de production.

Compte tenu de l'analyse faite dans le chapitre premier, on relève d'emblée que la combinaison de moindre coût qui est donc censée être choisie de préférence par la firme doit nécessairement se trouver dans le domaine de substitution. Cependant, on peut avoir intérêt à certains moments à formuler le présent problème d'une manière alternative : au lieu de rechercher la combinaison de moindre coût permettant de réaliser un niveau de production déterminé, on peut se demander au contraire quelle serait la quantité produite la plus élevée qu'on serait en mesure d'obtenir à l'aide d'un coût de production donné. En d'autres termes, en pareil cas, on a affaire à un problème de maximisation sous contrainte au lieu d'un problème de minimisation sous contrainte. En fait, on aboutit à un résultat identique quelle que soit la manière adoptée pour formuler le problème posé à la firme par la gestion optimale de son coût de production.

En toute hypothèse, il est évident que, pour opérer son choix entre combinaisons de facteurs, la firme va devoir tenir compte de leur prix ou, mieux, des conditions dans lesquelles elle peut acquérir des quantités plus ou moins importantes des divers facteurs. Ceci pose le problème de savoir quelle est la forme de concurrence en vigueur sur les marchés de facteurs propres à la firme envisagée. On supposera ici en première analyse que la firme se trouve dans une situation de concurrence parfaite sur chacun de ses marchés de facteurs. Pour les besoins de la présente analyse, une telle hypothèse implique uniquement le fait que la firme est en mesure de se procurer des quantités plus ou moins considérables des différents facteurs aux prix qui sont respectivement en vigueur pour l'instant sur chaque marché de facteurs. En d'autres termes, les prix actuels sur les marchés de facteurs sont censés demeurer inchangés, quelle que soient les quantités précises de facteurs demandées par la firme. On peut estimer que c'est là une situation fort proche de ce qui est observé pour la plupart des firmes existantes sur bon nombre de marchés de facteurs.

Pour la firme qui se trouve ainsi dans une situation de concurrence parfaite sur ses marchés de facteurs, c'est-à-dire qui considère leurs prix comme des données qui lui sont imposées par le marché, donc qui ne peuvent être influencées par son propre comportement, le rôle de la firme se limite par conséquent à stipuler les quantités qu'elle désire utiliser aux prix actuellement en vigueur. En d'autres termes, elle se comporte comme un simple ajusteur de quantité. En désignant par w_1 et w_2 les prix respectifs des facteurs dans le cas simple où il n'existe que les deux seuls facteurs x_1 et x_2, le coût de production (C) impliqué par l'utilisation d'une combinaison déterminée quelconque des deux facteurs peut s'écrire comme suit :

$$C = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 \qquad (1)$$

La formule (1) constitue l'équation implicite d'une droite qui, dans le quadrant positif du plan des facteurs, intercepte les deux axes de coordonnées. Cette droite est appelée d'ordinaire une droite d'isocoût, puisqu'elle montre toutes les combinaisons possibles des deux facteurs pour lesquelles le coût de production atteint un montant donné. Si l'on fait prendre une série de valeurs successives à la constante paramétrique C, on obtient une famille de droites d'isocoût. On peut mettre alternativement l'équation du coût sous une forme explicite par rapport à l'un des facteurs. On a par exemple :

$$x_2 = C/w_2 - \underbrace{(w_1 / w_2)}_{\text{pente}} x_1 \qquad (2)$$

Ainsi, la valeur absolue de la pente d'une droite d'isocoût par rapport à l'axe des abscisses où l'on mesure x_1 équivaut donc au rapport des prix des facteurs. Comme, au stade actuel de l'analyse, ces derniers sont supposés constants, il en résulte qu'au fur et à mesure que la constante C prend des valeurs de plus en plus élevées, la droite d'isocoût se déplace parallèlement à elle-même en s'écartant de l'origine. Tout le quadrant positif du plan des facteurs est ainsi entièrerement rempli par une famille de droites d'isocoût.

conc. impfte

On peut tenir compte alternativement de diverses formes possibles d'imperfection de la concurrence sur les marchés de facteurs. En pareil cas, les prix des facteurs vont normalement varier en fonction des quantités demandées. Les principaux cas à envisager seraient respectivement ceux de la concurrence monopsonique (un grand nombre de firmes qui rivalisent pour se procurer les services des facteurs dans des conditions d'imperfection de la concurrence), de la concurrence oligopsonique (un petit nombre de firmes qui cherchent à acquérir les services des facteurs), du monopsone (un acheteur en présence d'un nombre élevé d'offreurs) et du monopole bilatéral (un acheteur opposé à un seul vendeur). Cependant, l'étude de ces diverses formes de marché doit se faire en principe dans le cadre de la théorie des formes de marché (cfr, notamment, la troisième partie du cours).

Aussi, pour caractériser ici d'une manière générale la concurrence imparfaite sur les marchés des facteurs par rapport à l'hypothèse de concurrence parfaite sur lesdits marchés, on se limitera à supposer qu'en pareil cas, les prix des facteurs sont variables et non plus constants, en fonction des quantités demandées par la firme. En d'autres termes, à la différence du concurrent parfait qui prend les prix des facteurs comme des données, le concurrent imparfait dispose pour sa part d'un certain pouvoir de monopsone sur ses marchés de facteurs. Cela signifie qu'il est en mesure d'influencer le prix versé à chaque facteur en décidant d'en acquérir une quantité plus ou moins considérable. Dans l'hypothèse normale, le prix à payer par la firme sera d'autant plus élevé que celle-ci cherchera à acquérir une quantité plus importante. En pareil cas, la firme est donc confrontée sur ses marchés de facteurs, en principe, avec des fonctions d'offre croissantes. Par exemple, pour les deux facteurs envisagés, les fonctions d'offre peuvent s'écrire comme suit :

$$x_i = x_i\,(w_i) \quad , \quad (i = 1,\ 2) \quad , \quad dx_i\ /\ dw_i > 0$$ | O ↑

La firme est donc censée connaître avec certitude les fonctions d'offre susdites ou, ce qui revient au même, les fonctions inverses d'offre qui montrent de quelle manière le prix de chaque facteur réagit en fonction de la quantité utilisée par la firme :

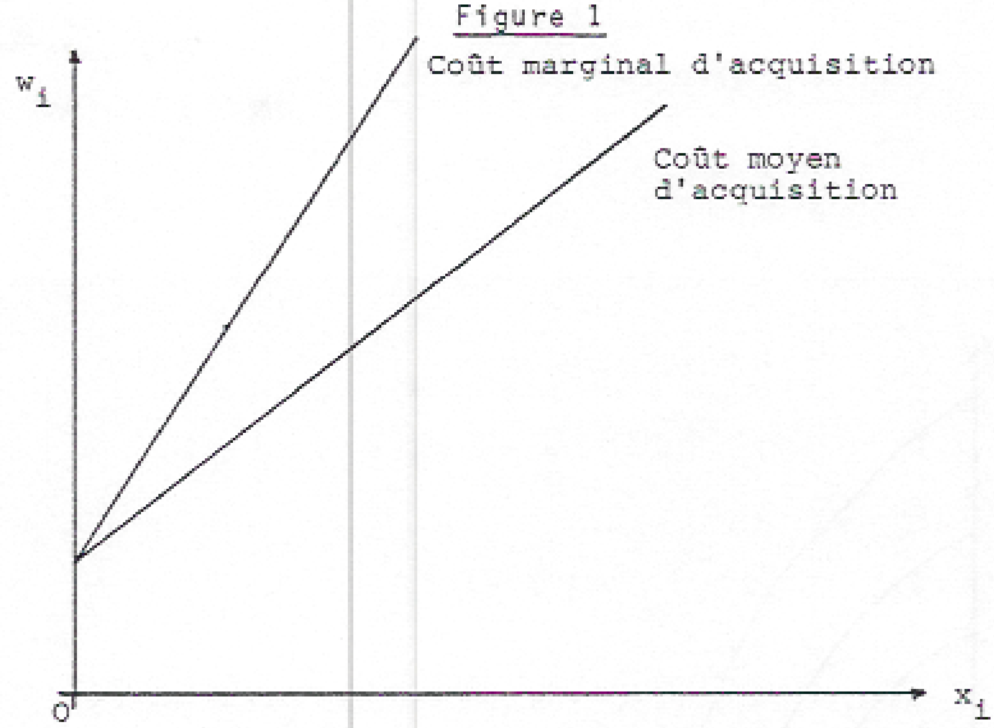
$$w_i = w_i\ (x_i) \quad , \quad dw_i\ /\ dx_i > 0 \quad (i = 1,\ 2) \tag{3}$$

Pour chaque facteur, on peut alors distinguer son coût moyen et son coût marginal d'acquisition. Le coût moyen d'acquisition d'un facteur équivaut au prix payé pour la quantité effectivement acquise par la firme. Le coût marginal d'acquisition du facteur x_i se définit quant à lui comme suit :

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = w_i + x_i \cdot \frac{dw_i}{dx_i} \ , \quad (i = 1,\ 2) \tag{4}$$

Ainsi, dans l'hypothèse normale précitée où l'on a : $dw_i\ /\ dx_i > 0$, le coût marginal d'acquisition est forcément toujours supérieur au coût moyen. La figure 1 illustre la relation entre le coût moyen et le coût marginal d'acquisition dans le cas particulier où la fonction d'offre du facteur et, partant la fonction inverse sont linéaires.

Figure 1



signe de $\frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}$

En outre, il reste à voir si le coût marginal d'acquisition d'un facteur, tel qu'il vient d'être défini, est croissant, constant ou, au contraire, décroissant en cas d'augmentation de la quantité employée dudit facteur. Or, dans l'hypothèse dite normale, on conviendra que le coût marginal d'acquisition d'un facteur est non seulement supérieur à son coût moyen mais est de plus croissant :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} = 2\,\frac{dw_i}{dx_i} + x_i \cdot \frac{d^2 w_i}{dx_i^2} > 0 \ , \ (i = 1,2) \qquad (5)$$

En fait, dès l'instant où la fonction d'offre du facteur et, par voie de conséquence, la fonction inverse sont non linéaires, il est possible que la dérivée seconde $(\frac{d^2 w_i}{dx_i^2})$ soit négative de telle sorte que signe de l'expression (5) soit incertain. L'hypothèse normale qui vient d'être posée consiste alors à admettre que le premier terme du membre de droite de la relation (5) l'emporte toujours en valeur absolue sur le second. L'hypothèse normale susdite se justifie dans la mesure où, à court terme tout particulièrement, il est réaliste d'admettre que, plus le prix d'un facteur s'élève, plus son offre devient rigide. En d'autres termes, cela revient à dire que l'élasticité de l'offre du facteur tend à diminuer en principe au fur et à mesure que son prix augmente.

Dès lors, dans l'hypothèse normale ainsi caractérisée, on a affaire, non plus à des droites d'isocoût, mais à des courbes d'isocoût décroissantes qui tournent leur concavité vers l'origine des axes :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\left(\frac{\partial C}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial C}{\partial x_2}\right) < 0 \qquad (6)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = -\,\frac{\overset{+}{\frac{\partial C}{\partial x_2}} \cdot \overset{+}{\frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2}} - \overset{+}{\frac{\partial C}{\partial x_1}} \cdot \overset{+}{\frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2}} \cdot \overset{-}{\frac{dx_2}{dx_1}}}{\left(\frac{\partial C}{\partial x_2}\right)^2} < 0 \qquad (7)$$

A titre exceptionnel, on peut considérer l'hypothèse assurément peu fréquente où le prix d'un facteur diminuerait en fonction de la quantité acquise par la firme (c'est le cas par exemple d'une firme à laquelle un fournisseur d'énergie ou de matières premières consent un tarif dégressif en fonction des quantités achetées. Dans la troisième partie, on verra qu'il s'agit là d'un cas de discrimination par les prix). En pareil cas, on a donc : $dw_i / dx_i < 0$. Lorsqu'une telle éventualité se vérifie, il paraît réaliste cependant de supposer que le coût marginal d'acquisition demeure malgré tout positif, tout en étant inférieur au coût moyen (w_i). Il n'empêche que, ce qui caractérise une telle situation, c'est le fait que le coût marginal d'acquisition peut alors s'avérer être décroissant : $\partial^2 C / \partial x_i^2 < 0$. Dès lors, dans le cas de deux facteurs, par exemple, si le coût marginal d'acquisition du premier facteur est croissant, tandis que celui du second est au contraire décroissant, on peut voir, sur base de l'expression (7), que les courbes d'isocoût tournent leur concavité vers l'origine des axes si le premier terme du numérateur l'emporte sur le second en valeur absolue et inversement.

SECTION I : LA MINIMISATION DU COUT DE PRODUCTION DANS L'HYPOTHESE DE CONCURRENCE PARFAITE SUR LES MARCHES DE FACTEURS

Considérons tout d'abord les conditions d'une gestion optimale du coût de production dans l'éventualité où tous les marchés de facteurs sont du point de vue de la firme ici envisagée des marchés compétitifs au sens qui a été précisé. Il s'agit donc, à supposer qu'il n'existe que deux facteurs, de minimiser la fonction de coût suivante :

$$C = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 \tag{8}$$

en respectant toutefois une contrainte, à savoir le fait qu'on doit s'efforcer d'atteindre un niveau de production prédéterminé $q°$ au moyen d'une technologie donnée qui se trouve représentée par la fonction de production : $q = f(x_1 , x_2)$. Alternativement, comme on l'a déjà remarqué, on peut tout aussi bien formuler le présent problème de la manière suivante : on peut s'efforcer de maximiser la quantité produite $q = f(x_1 , x_2)$, à l'aide d'un coût de production dont le montant est prédéterminé (par exemple, C°). Ainsi, dans le cas présent la contrainte est maintenant représentée par l'équation de définition (8). Si l'on choisit pour commencer cette dernière formulation, on peut tout d'abord remplacer x_2 dans la fonction de production par sa valeur exprimée en fonction de x_1 sur base de l'équation de contrainte (8). On obtient donc :

$$q = f(x_1 , \frac{C - w_1 x_1}{w_2}) .$$

Dans ces conditions, il suffit à présent de maximiser q par rapport à la seule variable de décision x_1 , alors qu'initialement il s'agissait de maximiser la même variable q vis-à-vis des deux variables de décision x_1 et x_2 tout en respectant simultanément la contrainte (8). Des conditions suffisantes du premier et du second ordre pour un maximum local régulier sont par conséquent les suivantes :

$$f'_1 + f'_2 \, (- \underbrace{\frac{w_1}{w_2}}_{\to \frac{dx_2}{dx_1}}) = 0 \qquad (9)$$

→ en se servant de la contrainte

$$f''_{11} + 2 \cdot f''_{12} \, (- \frac{w_1}{w_2}) + f''_{22} \, (\frac{w_1}{w_2})^2 < 0 \qquad (10)$$

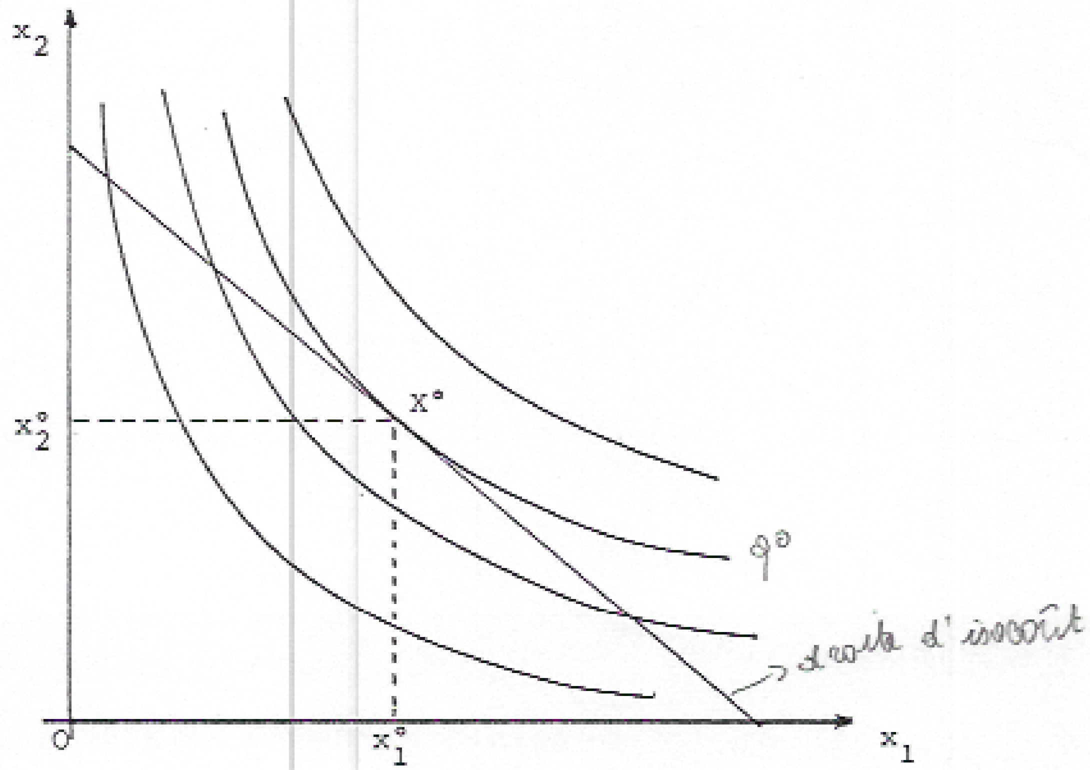
→ pq que q concave ? ^ max

La condition du premier ordre peut être mise notamment sous la forme suivante :

$$f'_1 \, / \, f'_2 = w_1 \, / \, w_2 \qquad (11)$$

Cela revient à exiger l'égalité entre le taux marginal de substitution (technique) entre les deux facteurs envisagés et leur prix relatifs. Le rapport des prix peut être interprété comme le taux de transformation qui, dans les conditions de concurrence parfaite sur les marchés de facteurs présentement envisagées, permet d'échanger une certaine quantité d'un facteur contre une quantité donnée de l'autre facteur tout en maintenant constant le coût de production. Sur l'interprétation du taux marginal de substitution, on renvoie au chapitre précédent. La figure 2 donne une illustration graphique de la condition d'équilibre : le point X de tangence entre la droite d'isocoût considérée et une isoquante correspondant à un niveau de production q° montre la combinaison de facteurs permettant de maximiser la quantité produite pour le coût de production envisagé.

Figure 2



En ce qui concerne la condition du second ordre (10), elle peut être mise sous la forme suivante en remplaçant le rapport des prix (w_1 / w_2) par le taux marginal de substitution f_1' / f_2', puis en multipliant les deux membres de l'inégalité par $(f_2')^2$:

$$(f_2')^2 \, f_{11}'' - 2 \, . \, f_1' \, . \, f_2' \, . \, f_{12}'' + (f_1')^2 \, f_{22}'' < 0 \qquad (12)$$

On vérifie que cela revient à exiger que le déterminant suivant soit positif :

$$\bar{F} = \begin{vmatrix} 0 & f'_1 & f'_2 \\ f'_1 & f''_{11} & f''_{12} \\ f'_2 & f''_{21} & f''_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad (13)$$

Il doit en être ainsi, on l'a vu, si la fonction de production est à tout le moins <u>strictement quasi concave</u>.

Alternativement, on peut recourir comme suit à la méthode de Lagrange. Puisqu'on s'efforce de minimiser la fonction de coût $C = w_1 . x_1 + w_2 . x_2$, sous la contrainte qu'il s'agit d'obtenir la quantité $q°$ au moyen de la fonction de production $f(x_1 , x_2)$, on forme en conséquence la fonction de Lagrange suivante :

$$L(x_1 , x_2 , C') = w_1 . x_1 + w_2 . x_2 + C' [q° - f(x_1 , x_2)] \qquad (14)$$

Dans cette fonction, C' désigne ici un multiplicateur de Lagrange. Les conditions nécessaires du premier ordre exigent que les dérivées partielles premières de la fonction de Lagrange par rapport au multiplicateur de Lagrange C' et aux différents instruments, calculées aux points optimaux $(C')^*$, x_1^* et x_2^* , soient nulles :

$$q° - f(x_1 , x_2) = 0 \qquad (15)$$

$$w_i - C' . f'_i = 0 , \ (i = 1,2) \qquad (16)$$

A partir des deux conditions (16), on observe que la condition suivante doit être remplie :

$$C' = \frac{w_1}{f'_1} = \frac{w_2}{f'_2} \qquad (17)$$

Avant de commenter la condition d'équilibre mise sous la présente forme, qui équivaut, on le vérifie d'emblée, à la condition (11) commentée plus haut, on convient de préciser au préalable l'interprétation économique du multiplicateur de Lagrange C'. Compte tenu des différentielles respectives des fonctions de coût et de production, on peut en déduire :

$$\frac{dC}{dq} = \frac{w_1.dx_1 + w_2.dx_2}{f'_1.dx_1 + f'_2.dx_2} = \frac{C'.f'_1.dx_1 + C'.f'_2.dx_2}{f'_1.dx_1 + f'_2.dx_2} = C' \quad (18)$$

Or, la dérivée (dC/dq) n'est autre que le concept économique bien connu de coût marginal de production. Ainsi le multiplicateur de Lagrange équivaut donc à ce dernier concept. Au surplus, on rappelle une fois encore que ce résultat n'est qu'une application d'une propriété générale de la méthode de Lagrange en vertu de laquelle, à l'équilibre, chaque multiplicateur de Lagrange mesure la sensibilité avec laquelle la valeur optimale de la fonction d'objectif réagit à une modification dans la constante de contrainte correspondante. Dans le cas présent, la fonction d'objectif est donc constituée par la fonction de coût de production, tandis que $q°$ représente la constante de contrainte.

Compte tenu de la présente interprétation économique du multiplicateur de Lagrange C', il s'ensuit que les expressions (w_1/f'_1) et (w_2/f'_2) doivent être égales à l'équilibre au coût marginal de production. Or, chacune de ces deux expressions montre la manière dont le coût de production réagirait suite à l'augmentation de la production due à l'accroissement isolé d'un facteur. En effet, chacune de ces deux expressions équivaut au quotient du coût marginal d'acquisition du facteur considéré par sa productivité physique marginale, étant entendu que, dans la présente hypothèse de concurrence parfaite sur les marchés de facteurs, le coût marginal d'acquisition d'un facteur est constant et se confond avec son coût moyen. On peut désigner dès lors chacune des deux expressions susdites comme des coûts marginaux partiels de production. Dans ces conditions, la gesrelat° coût - échelle

tion optimale du coût de production implique donc l'égalité des coûts marginaux partiels. De son côté, toutefois, C' possède un sens plus général : il mesure le coût marginal de production en général, c'est-à-dire le coût engendré par une augmentation de la quantité due à l'accroissement simultané des quantités employées des facteurs au voisinage de la position d'équilibre.

On a vu dans le chapitre premier que l'élasticité d'échelle équivaut à la somme des élasticités de la production par rapport aux facteurs de telle sorte qu'on a la relation suivante :

$E_{q,t} = \frac{x_1}{q} f_1' + \frac{x_2}{q} f_2'$

$$E_{q,t} \cdot q = f_1' \cdot x_1 + f_2' \cdot x_2 \tag{19}$$

Or, lorsque la firme s'efforce de gérer son coût de production de manière optimale, c'est-à-dire choisit une combinaison de facteurs de moindre coût, l'équation du coût peut s'écrire :

$C = C' f_1' x_1 + C' f_2' x_2$ $\qquad C' = \frac{w_1}{f_1'} = \frac{w_2}{f_2'}$

$$C = C' \, (f_1' \cdot x_1 + f_2' \cdot x_2) \tag{20}$$

En combinant ces deux dernières relations, on en déduit :

$$E_{q,t} = (C/q) \; / \; C' = \frac{\text{coût moyen}}{\text{coût marginal}} \tag{21}$$

Or, on sait que suivant que l'élasticité d'échelle est supérieure, égale ou inférieure à l'unité, les rendements à l'échelle sont croissants, constants ou décroissants. D'où, en pareil cas, le coût marginal est alors respectivement inférieur, égal ou supérieur au coût moyen. Alternativement, la formule (21) peut encore s'écrire comme suit :

$$\frac{\text{coût marginal}}{\text{coût moyen}} = \frac{q}{C} \; \frac{dC}{dq} = 1/E_{q,t} \tag{22}$$

Cela signifie donc que l'élasticité du coût global de production par rapport à la quantité équivaut à l'inverse de l'élasticité d'échelle. D'où elle est inférieure, égale ou supérieure à l'unité selon que l'élasticité d'échelle est elle-même supérieure, égale ou inférieure à l'unité.

Les conditions du premier ordre (15) et (16) pour une position d'équilibre de moindre coût constituent un système d'équations simultanées montrant les relations implicites qui existent entre, d'une part, les variables endogènes de l'analyse, à savoir les quantités demandées des facteurs x_1 et x_2 et le coût marginal de production C' et, d'autre part, les données ou variables exogènes représentées ici par les prix des facteurs et la quantité produite : w_1, w_2 et $q°$. Il s'agit dès lors de dériver à partir du système susdit de relations implicites un ensemble de fonctions explicites montrant de quelle manière les quantités des différents facteurs demandées par la firme ainsi que le coût marginal de production réagissent à des modifications des prix des facteurs ou de la quantité produite. Moyennant un ensemble de conditions à préciser, on peut établir que l'on obtient effectivement à partir des conditions du premier ordre susdites les fonctions suivantes :

$$x_1 = x_1(w_1, w_2, q) \tag{23}$$

$$\left\{\begin{array}{l} q° - f(x_1, x_2) = 0 \\ w_1 - c'f'_1 = 0 \\ w_2 - c'f'_2 = 0 \end{array}\right.$$

$$x_2 = x_2(w_1, w_2, q) \tag{24}$$

$$C' = C'(w_1, w_2, q) \tag{25}$$

En particulier, les fonctions (23) et (24) constituent ce qu'il est d'usage d'appeler les fonctions de demande de facteurs à production constante(1). Si l'on considère une fois encore les conditions d'équilibre du premier ordre de minimisation du coût de production, on peut en déduire d'emblée une propriété fondamentale des fonctions de demande de facteurs, à savoir le fait qu'elles sont homogènes de degré zéro par rapport aux prix des facteurs. En d'autres termes, les quantités de facteurs utilisées par la firme demeurent inchangées en cas de variation proportionnelle des prix de tous les facteurs. Dès lors, par application du théorème d'Euler, on peut écrire :

(1) On parle également des fonctions de demande conditionnelles (sous-entendu sur un niveau de production donné).

Σ des f. pondérée par les argum-

$$w_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial w_1} + w_2 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial w_2} = 0 \qquad (26)$$

$$w_1 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial w_1} + w_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial w_2} = 0 \qquad (27)$$

Alternativement, on peut présenter ces deux dernières relations en termes d'élasticités. En désignant par E_{ij} l'élasticité du facteur x_i $(i = 1, 2)$ par rapport au prix w_j $(j = 1, 2)$, on obtient en multipliant respectivement (26) et (27) par $1/x_1$ et $1/x_2$:

$$E_{11} + E_{12} = 0 \quad (28) \quad ; \quad E_{21} + E_{22} = 0 \qquad (29)$$

Sur le plan empirique, notons tout d'abord que la présente propriété a l'implication suivante : il suffit d'estimer, par exemple, l'élasticité directe de la quantité employée d'un facteur par rapport à son prix pour obtenir du même coup l'élasticité de la quantité utilisée du même facteur vis-à-vis du prix de l'autre facteur, ce qui réduit en conséquence le nombre des estimations nécessaires de quatre à deux. Ensuite, les relations (26) et (27) ou, alternativement, les relations (28) et (29) impliquent que les deux termes repris dans chacune de ces relations aient des signes opposés. En fait, il est aisé de voir à l'aide d'une figure telle que la figure 2 que, si w_1 augmente, par exemple, la position d'équilibre de moindre coût pour le niveau de production considéré q^* se trouvera désormais située à la gauche du point initial X . Dans cette nouvelle position, la droite d'isocoût aura une pente plus forte en valeur absolue par suite de la hausse de w_1. Dès lors, on en déduit qu'une telle hausse opère un effet de substitution négatif aux dépens du facteur x_1 et un effet de substitution positif au profit de l'autre facteur. En d'autres termes, la dérivée $(\partial x_1/\partial w_1)$ ou, alternativement, l'élasticité directe E_{11} est nécessairement négative, tandis que la dérivée $(\partial x_2/\partial w_1)$ ou, alternativement l'élasticité E_{21} est forcément positive. On tire les mêmes conclusions en ce qui concerne, par exemple, les signes des élasticités E_{22} et E_{12}.

Stat. comparat.

Compte tenu du fait que les élasticités croisées E_{12} et E_{21} sont positives, les facteurs x_1 et x_2 seront dits "concurrents". Toutefois, lorsque le nombre de facteurs est supérieur à deux, une nouvelle possibilité apparaît. Dans des relations analogues aux relations (28) et (29), certaines élasticités croisées peuvent également avoir un signe négatif à l'instar de l'élasticité directe. Si, par exemple, l'expression E_{ij} $(i \neq j)$ a un signe négatif, les facteurs x_i et x_j seront dits "complémentaires". Il en est ainsi dans la mesure où il apparaît que la hausse de w_j incite pareillement la firme à réduire l'emploi des facteurs x_i et x_j. Il existe, cependant, d'autres manières possibles de définir la concurrence ou la complémentarité entre facteurs. Quoi qu'il en soit, il n'en reste pas moins que, pour qu'une relation analogue aux relations (28) et (29) demeure satisfaite, chaque facteur doit avoir au minimum un facteur concurrent au sens qui vient d'être précisé.

En ce qui concerne les fonctions de demande de facteurs (23) et (24), on peut également s'intéresser au point de savoir quel est le signe d'une dérivée partielle telle que : $(\partial x_i/\partial q)$ ou, alternativement, d'une élasticité telle que :

$$\frac{q}{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q} \quad , \quad i = 1, 2 .$$

Or, sur la base de ce genre d'expressions, on est amené à introduire une nouvelle distinction entre facteurs. Un facteur sera dit "normal" ou encore "supérieur" si l'augmentation du volume de production entraîne un accroissement de l'utilisation du facteur. Il sera considéré, au contraire, comme "inférieur" dans l'hypothèse inverse. Pour bien comprendre ce qui est impliqué par la présente distinction entre facteurs normaux et facteurs inférieurs, on peut recourir à l'analyse graphique suivante. Sur la figure 3, une position initiale X' montre la combinaison actuelle de moindre coût pour le niveau de production envisagé et compte tenu des valeurs prises pour l'instant par les prix des facteurs. Tout en maintenant ces prix inchangés, on peut déplacer la droite d'isocoût AB parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle soit tangente en X" à une isoquante correspondant à une production plus élevée. Or, rien ne nous dit, *a priori*, si le point X" sera

Analyse graphique ↓

situé à droite, à gauche ou encore sur la verticale de l'axe Ox_1 qui passe par X' . Autrement dit, on n'est nullement assuré du fait qu'au nouveau point d'équilibre, la quantité demandée d'un facteur, tel que x_1 , sera supérieure, égale ou inférieure à ce qu'elle était au départ. On peut très bien avoir une des situations alternatives qui sont représentées sur les figures 3-b ou 3-c au lieu de celle indiquée sur la figure 3-a. Cela signifie donc que, si l'on se déplace dans le plan des facteurs sur une droite verticale à l'axe Ox_1 qui passe par le point X' , en s'écartant de l'axe des abscisses, on peut

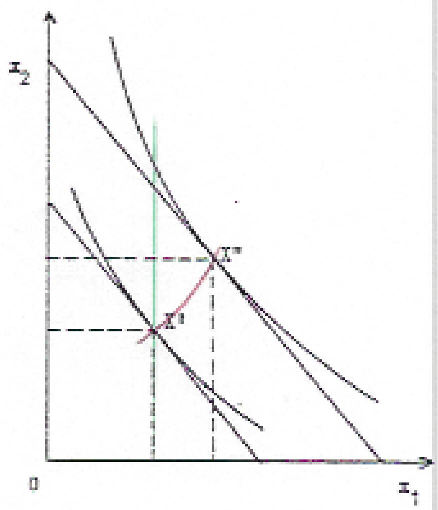


FIGURE 3-a

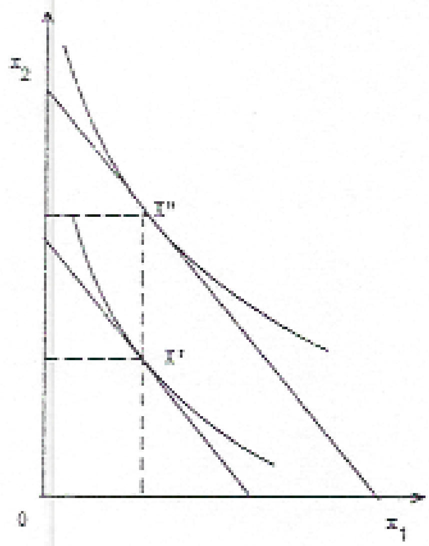


FIGURE 3-b

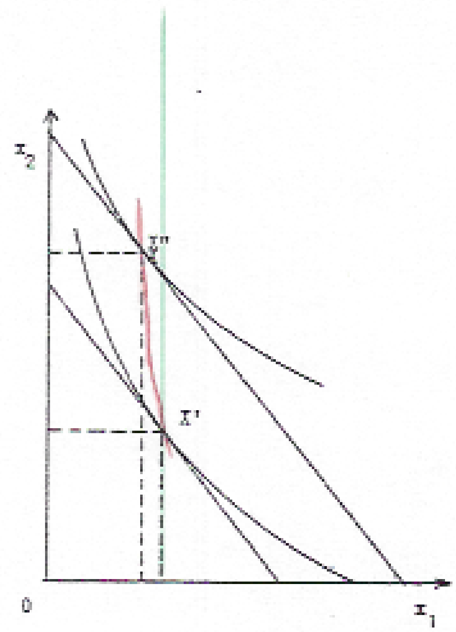


FIGURE 3-c

tout aussi bien constater que les isoquantes deviennent de plus en plus inclinées (cas de la figure 3-a), c'est-à-dire ont une pente de plus en plus forte en valeur absolue ou bien, au contraire, que ces courbes sont de plus en plus aplaties, c'est-à-dire ont une pente de plus en plus faible en valeur absolue (cas de la figure 3-c). Enfin, il reste le cas où l'on constaterait qu'en procédant de la manière indiquée, la valeur absolue de la pente des isoquantes demeurerait inchangée (cas de la figure 3-b).

Dans l'un et l'autre cas, il apparaît par conséquent que tout dépend du point de savoir comment le taux marginal de substitution se modifie-t-il lorsque l'on se déplace dans le plan des facteurs sur une verticale à l'un des axes. En effet, on a choisi ici de définir le taux marginal de substitution comme la valeur absolue de la pente d'une isoquante (pente calculée par rapport à l'axe Ox_1). Or, ce taux équivaut, on l'a vu, au rapport de la productivité physique marginale du facteur x_1 sur celle du facteur x_2. Par conséquent, dans le cas de la figure 3-a, pour un déplacement dans la direction indiquée, le fait que le taux marginal de substitution augmente signifie dès lors que f_1' augmente relativement à f_2'. Peu importe de savoir si, dans l'hypothèse indiquée, f_1' et f_2' augmentent ou diminuent l'un et l'autre. Ce qui importe avant tout, c'est le fait de l'augmentation relative de f_1' vis-à-vis de f_2'. L'inverse est vrai dans le cas de la figure 3-c. En pareil cas, on constate donc une diminution du taux marginal de substitution qui s'explique par une diminution relative de f_1' relativement à f_2'. Ainsi, le fait que le facteur x_1 apparaisse ici comme un facteur inférieur se traduit par la propriété suivante : si l'on maintient inchangée la quantité utilisée de ce facteur tout en utilisant une quantité de plus en plus grande de l'autre facteur, sa productivité physique marginale diminue relativement à celle du facteur variable.

On peut observer que tous les cas envisagés s'avèrent néanmoins parfaitement compatibles avec l'hypothèse selon laquelle les isoquantes sont décroissantes et strictement convexes vers l'origine, c'est-à-dire, on le sait, l'hypothèse selon laquelle la fonction de production doit être à tout le moins strictement quasi concave.

Analyse mathématique

Enfin, on peut compléter l'analyse graphique qui vient d'être faite par la présente analyse mathématique. Pour vérifier si le facteur x_1 est un facteur normal ou un facteur inférieur, il convient donc d'observer si le taux marginal de substitution augmente, ou au contraire, diminue si l'on accroît x_2 tout en maintenant x_1 inchangé. A cette fin, il convient donc d'observer le signe de la présente expression :

$$\frac{\partial(f'_1/f'_2)}{\partial x_2} = \frac{f'_2 \cdot f''_{12} - f'_1 \cdot f''_{22}}{(f'_2)^2} \tag{30}$$

Le facteur x_1 sera donc supérieur ou inférieur selon que l'expression figurant au numérateur du membre de droite sera positive ou négative. Accessoirement, on peut observer que cette même expression équivaut à un cofacteur du déterminant hessien bordé de la fonction de production $\bar{F}$. Si l'on prend la convention de désigner par ligne zéro et colonne zéro la première ligne et la première colonne de ce déterminant, on a :

p/c la parité/imparité de $i+j$ $i+1$ impair?

$$\bar{F}_{01} = f'_2 \cdot f''_{12} - f'_1 \cdot f''_{22} \tag{31}$$

D'un autre côté, on a vu que, pour deux facteurs, le déterminant hessien bordé $\bar{F}$ a un signe positif si la fonction de production est strictement quasi concave. D'où, le facteur x_1 est un facteur normal ou inférieur selon que le déterminant $\bar{F}_{01}$ a le même signe ou un signe opposé à celui de $\bar{F}$.

On peut encore dégager une autre implication du signe de la dérivée partielle (30). Si le facteur x_1 est un facteur normal, on a donc la restriction suivante :

$$f''_{12} > \frac{f'_1 \cdot f''_{22}}{f'_2} \tag{32}$$

D'où, la dérivée partielle seconde croisée doit être positive si la productivité physique marginale de l'autre facteur est croissante et peut être positive ou négative dans l'hypothèse inverse. Par contre, si le facteur x_1 est un facteur inférieur, l'inégalité (32) se trouve donc renversée. Dès lors, la dérivée partielle seconde croisée doit être négative si la productivité physique marginale de l'autre facteur est décroissante et peut être positive ou négative dans l'hypothèse inverse. Il apparaît, dès lors, que la prétendue "loi de Wicksell" selon laquelle la dérivée partielle seconde croisée est toujours censée être positive dans le domaine de substitution est incompatible avec l'existence de facteurs inférieurs dès l'instant où, au point considéré la loi des rendements marginaux décroissants est elle-même vérifiée.

$\Downarrow$ $f''_{22} < 0 \Rightarrow \frac{f'_1}{f'_2} f''_{22} < 0 \Rightarrow 0 < f''_{12} < 0$ impossible

Hicks dans <u>Valeur et Capital</u> avait déjà évoqué la possibilité selon laquelle certains facteurs peuvent être inférieurs au sens précité en remarquant que des facteurs peuvent très bien s'avérer plus intéressants que d'autres pour de faibles niveaux de production, puis devenir de moins en moins intéressants à mesure que le volume de production augmente. Cependant, on vérifie aisément qu'un facteur ne peut pas être inférieur pour tous les niveaux de production. A cette fin, on peut procéder de la même manière que sur la figure 3. Ainsi, dans le quadrant positif du plan des facteurs, considérons l'ensemble des points de tangence entre chacune des isoquantes et chacune des droites d'isocoût valables pour un rapport donné des prix des facteurs. Chacun de ces points constitue tout aussi bien la solution d'un problème de minimisation du coût de production pour une quantité donnée que celle d'un problème de maximisation de la quantité pour un coût donné. On appelle <u>chemin d'expansion de la firme</u> le lieu formé par l'ensemble de ces points de tangence. On le désigne également parfois comme la courbe d'ajustement des facteurs puisque, pour chaque volume de production possible, elle indique les quantités respectivement utilisées des deux facteurs considérés. Il est clair que, si cette courbe a une pente positive, les deux facteurs envisagés sont normaux. Si, au contraire, sa pente devient négative, cela signifie que l'un des facteurs est inférieur, l'autre facteur restant forcément normal, puisque, pour produire davantage, il faut bien accroître au moins l'utilisation d'un facteur. Il est évident que le chemin d'expansion ne peut avoir constamment une pente négative, sa pente devant nécessairement être positive pour de faibles niveaux de production. Il va sans dire que, si le prix d'un facteur se modifie, on obtient un nouveau chemin d'expansion.

On peut obtenir aisément l'<u>équation du chemin d'expansion</u>. En effet, on a vu que, partout dans le domaine de substitution, les isoquantes sont décroissantes et strictement convexes vers l'origine des axes de telle sorte que les conditions du second ordre de minimisation du coût seront partout satisfaites. D'où, l'équation du chemin d'expansion peut être représentée par une fonction implicite des facteurs pour laquelle les conditions du premier ordre de minimisation du coût sont satisfaites :

$$g(x_1 \; , \; x_2) = 0 \tag{33}$$

Compte tenu de la condition d'égalité entre le rapport des prix des facteurs et le rapport de leurs productivités physiques marginales, on obtient donc :

$$g(x_1 \; , \; x_2) = w_1 \; . \; f'_2 - w_2 \; . \; f'_1 = 0 \tag{34}$$

Dans le cas d'une fonction de Cobb-Douglas, on a, par exemple :

$q = A x_1^a x_2^b$ $\frac{a}{b} \frac{x_2}{x_1} = \frac{w_1}{w_2}$ +MS

$$w_1 \; . \; \frac{b.q}{x_2} - w_2 \; . \; \frac{a.q}{x_1} = 0 \tag{35}$$

Alternativement, on peut écrire l'équation du chemin d'expansion sous une forme explicite par rapport à x_2 , par exemple :

pente

$$x_2 = \frac{b.w_1}{a.w_2} . \; x_1 \tag{36}$$

En toute hypothèse, il apparait que le chemin d'expansion dans le cas d'une fonction de Cobb-Douglas homogène de degré r est représenté par un segment de droite passant par l'origine. Ce résultat est conforme à une propriété générale des fonctions homogènes de degré r , à savoir, on l'a vu, le fait que le rapport des productivités physiques marginales demeure inchangé si l'on fait varier tous les facteurs dans une même proportion, c'est-à-dire si l'on modifie uniquement l'échelle de production. D'une manière générale, dès lors, le chemin d'expansion de la firme est constitué par un tel segment de droite si la fonction est homogène de degré r (voir figure 4) tandis qu'il peut avoir une forme quelconque comme, par exemple, celle indiquée sur la figure 5, si la fonction de production n'est pas homogène de degré r . Cependant, il apparait du même coup que, si la fonction est homogène de degré r , tous les facteurs seront forcément normaux au sens précité, la possibilité de facteurs inférieurs f° homogène de D° r

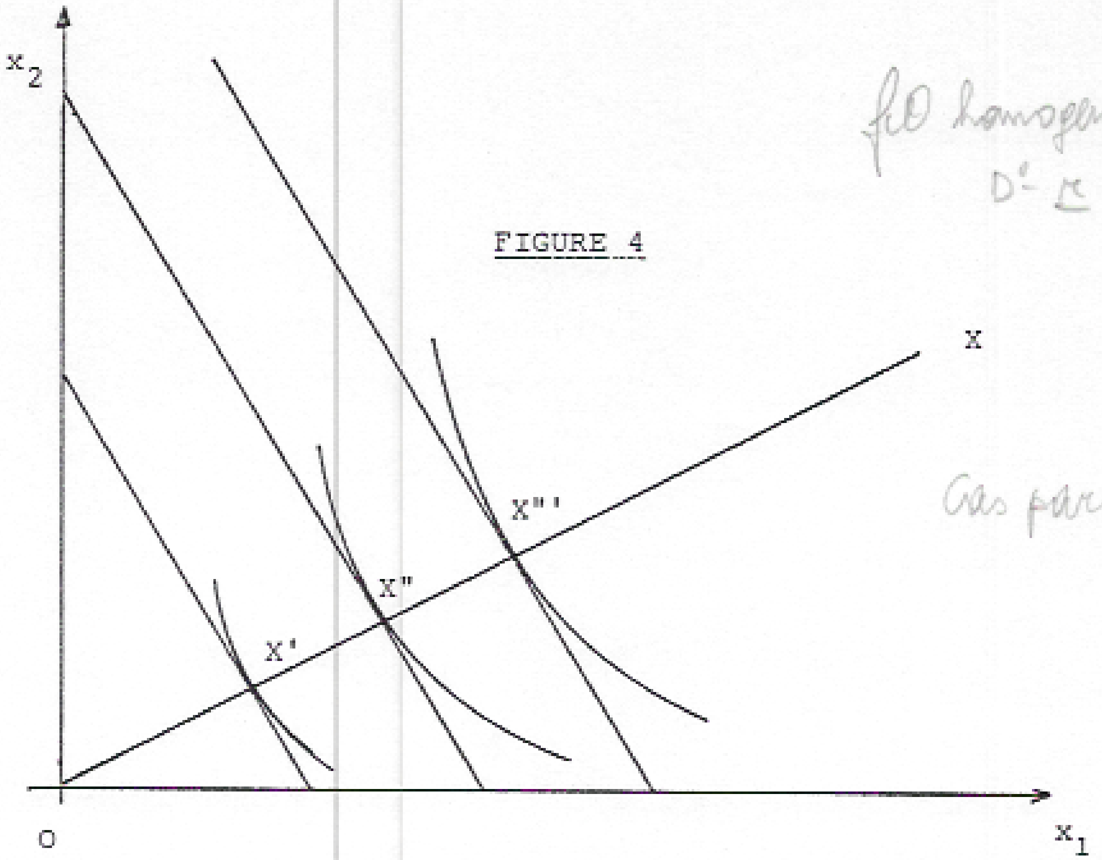


FIGURE 4

Cas partic.

forme qcq. cas général

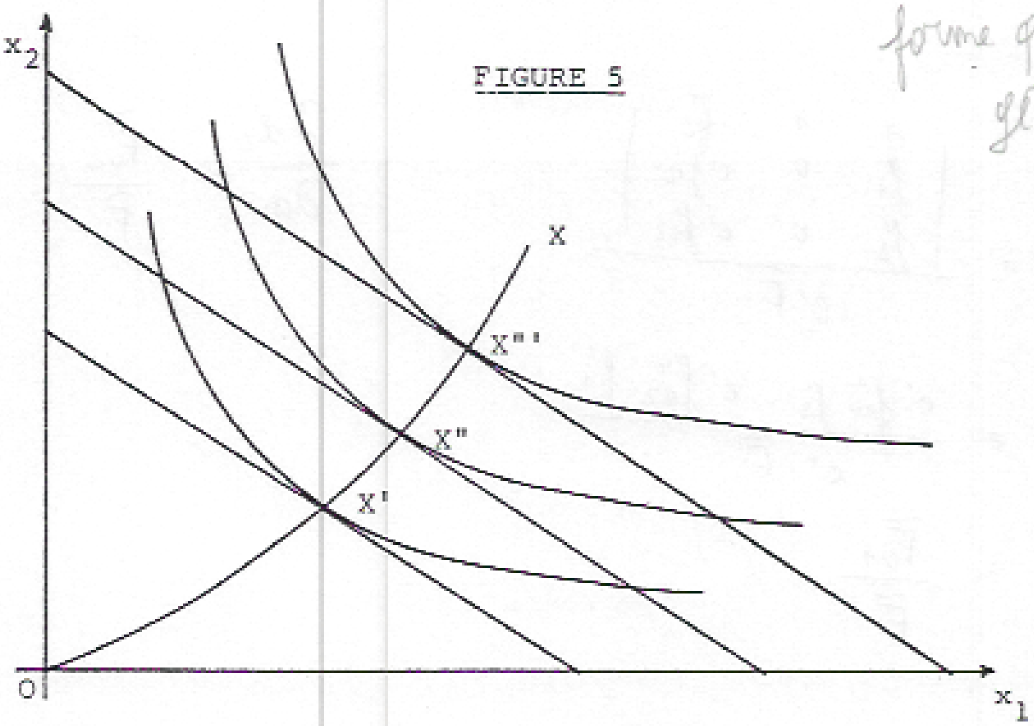


FIGURE 5

se trouvant donc exclue (1). Si l'on utilise, dès lors, une forme homogène de fonction dans des recherches empiriques, cela implique, entre autres, que l'on exclut a priori la possibilité que les facteurs étudiés puissent être des facteurs inférieurs.

On peut analyser plus en détail les propriétés des fonctions de demande de facteurs par le moyen d'une analyse de statique comparée. En dérivant totalement les conditions de premier ordre (15) et (16), il vient :

$$d\,q - f'_1 \,.\, d\,x_1 - f'_2 \,.\, d\,x_2 = 0$$

$$d\,w_1 - C' \,.\, f''_{11} \,.\, d\,x_1 - C' \,.\, f''_{12} \,.\, d\,x_2 - f'_1\, d\,C' = 0$$

$$d\,w_2 - C' .\, f''_{21} \,.\, d\,x_1 - C' f''_{22} \,.\, d\,x_2 - f'_2 \,.\, d\,C' = 0$$

On obtient donc le système matriciel suivant :

endo

$$\begin{bmatrix} 0 & f'_1 & f'_2 \\ f'_1 & C'.f''_{11} & C'.f''_{12} \\ f'_2 & C'.f''_{21} & C'.f''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\,C' \\ d\,x_1 \\ d\,x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\,q \\ d\,w_1 \\ d\,w_2 \end{bmatrix} \qquad (37)$$

différentielle des var ~~endo~~ exo.

On a par exemple pour le facteur x_1 :

x_1 N

$$\frac{\partial x_1}{\partial q} = \frac{(f'_2\ f''_{12} - f'_1\ f''_{22})}{\overline{F}} = \frac{\overline{F}_{01}}{\overline{F}} \gtrless 0 \text{ si } \overline{F}_{01} \gtrless 0 \qquad (38)$$

x_1 I

Ceci confirme donc le résultat obtenu précédemment par l'analyse graphique.

---

(1) Un des premiers auteurs qui ait noté cette incompatibilité est D.V.T. BEAR dans "Inferior inputs and the Theory of the Firm", Journal of Political Economy (73, 1965, pp. 287-289, en particulier, p. 288. Voir aussi FERGUSSON, The Neo-classical Theory of Production and Distribution, Cambridge, 1969, p. 191.

En ce qui concerne la variation du prix d'un facteur, on a également :

$$\frac{\partial x_1}{\partial w_1} = - \frac{(f'_2)^2}{C' . \bar{F}} < 0 \qquad (39)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial w_1} = \frac{f'_1 . f_2}{C' . \bar{F}} > 0 \qquad (40)$$

Puisqu'il n'y a que deux facteurs, ils sont donc nécessairement des substituts pour le niveau de production envisagé (voir supra). Compte tenu du fait que l'on a de même :

$$\frac{\partial x_1}{\partial w_2} = \frac{f'_1 . f'_2}{C' . \bar{F}} > 0 \quad , \qquad (41)$$

i.e. cond d'équi. du 1er ordre

on vérifie au passage le respect de la propriété d'homogénéité :

$$\frac{\partial x_1}{\partial w_1} . w_1 + \frac{\partial x_1}{\partial w_2} . w_2 = - \frac{(f'_2)^2 \, (C' . f'_1)}{C' . \bar{F}} + \frac{f'_1 f'_2 (C' . f'_2)}{C' . \bar{F}} = 0 \qquad (42)$$

Enfin, pour ce qui concerne le coût marginal, on obtient pareillement :

$$\frac{\partial C'}{\partial q} = \frac{\partial^2 C}{\partial q^2} = \frac{C' . F}{\bar{F}} \qquad (43)$$

<0 / >0

Le coût marginal étant nécessairement positif, il en ressort qu'il sera respectivement croissant ou décroissant selon que le signe du déterminant hessien de la fonction de production sera lui-même identique ou opposé à celui du hessien bordé. On a enfin :

$$\frac{\partial C'}{\partial w_1} = \frac{f'_2 \; f''_{21} - f'_1 . f''_{22}}{\bar{F}} = \frac{\bar{F}_{01}}{\bar{F}} = \frac{\partial x_1}{\partial q} \qquad (44)$$

$$- \frac{\begin{vmatrix} 0 & f'_1 & f'_2 \\ 1 & C'f''_{11} & C'f''_{12} \\ 0 & C'f''_{21} & C'f''_{22} \end{vmatrix}}{C'\bar{F}} = \frac{C'f'_2 f''_{21} - C'f'_1 f''_{22}}{C'\bar{F}} = \frac{\bar{F}_{01}}{\bar{F}}$$

En d'autres termes, le coût marginal augmente ou diminue en cas de hausse du prix d'un facteur suivant qu'il s'agit d'un facteur supérieur ou inférieur.

SECTION II : IMPERFECTION DE LA CONCURRENCE SUR LES MARCHES DE FACTEURS

Pour conclure, on peut considérer brièvement comment se présente le problème de la minimisation du coût de production dans l'hypothèse où la concurrence sur les marchés de facteurs s'avère imparfaite. Conformément à ce qui a été précisé antérieurement, l'imperfection de la concurrence sur ces marchés est caractérisée ici simplement par le fait que les prix des facteurs varient en fonction des quantités acquises par la firme. La fonction de coût s'écrit donc comme suit :

$$C = w_1(x_1) \cdot x_1 + w_2(x_2) \cdot x_2 \tag{1}$$

On peut former dès lors la fonction de Lagrange suivante :

$$L = w_1(x_1) \cdot x_1 + w_2(x_2) \cdot x_2 + C' \, [q° - f(x_1, x_2)] = 0 \tag{2}$$

(C' = un multiplicateur de Lagrange). Les conditions d'équilibre du premier ordre sont les suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial C'} = q° - f(x_1, x_2) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = w_i(x_i) + x_i \cdot \frac{dw_i}{dx_i} - C' \cdot f_i' = \frac{\partial C}{\partial x_i} - C' \cdot f_i' = 0 \;, \; (i = 1,2) \quad (3)$$

A partir des deux conditions (3), on obtient l'exigence suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial x_1} \; / \; f_1' = C' = \frac{\partial C}{\partial x_2} \; / \; f_2' \tag{4}$$

En vertu du principe général qui a été rappelé, l'interprétation économique du multiplicateur de Lagrange reste identique (ce que l'on peut vérifier du reste en utilisant le même procédé que précédemment) : C' mesure donc le coût marginal de production. La condition (4) signifie donc que, pour chaque facteur, son coût marginal d'acquisition divisé par sa productivité physique marginale doit égaler le coût marginal de production. En d'autres termes, il doit y avoir une fois de plus égalité entre les coûts marginaux partiels et le coût marginal de production. Alternativement, la condition (4) peut être présentée sous la forme suivante :

CM = w_i en concurrence pure pfte

$F = w_1x_1 + w_2x_2$ ← $\frac{F_1'}{F_2'}$

$$- \frac{\partial C/\partial x_1}{\partial C/\partial x_2} = - \frac{f_1'}{f_2'} \tag{5}$$

Ceci correspond de toute évidence à la condition de tangence entre une courbe d'isocoût et l'isoquante envisagée. (Voir figure 6).

Figure 6